DET KGL. DANSKE VIDENSKABERNES SELSKAB
MATEMATISK-FYSISKE MEDDELELSER, BIND XX, NR. 1

ÜBER GESCHLOSSENE KURVEN $(n+1)$-TER ORDNUNG IM $\mathfrak{R}^n$ MIT EINER ANWENDUNG AUF EBENE KURVEN DER KONISCHEN ORDNUNG 5 UND 6

VON

FR. FABRICIUS-BJERRE

KØBENHAVN
I KOMMISSION HOS EJNAR MUNKSGAARD
1942

Printed in Denmark.
Bianco Lunos Bogtrykkeri A/S.

EINLEITUNG

Im folgenden soll eine Klasse von geschlossenen Kurven C_{n+1} der Ordnung $n+1$ im projektiven $\mathfrak{R}^n$ untersucht werden. Eine Kurve dieser Klasse soll keine n linear abhängigen Punkte enthalten, d. h. keine n Punkte, die in demselben $\mathfrak{R}^{n-2}$ gelegen sind. Wir werden bekannte Resultate über ebene Kurven 3. Ordnung ohne Doppelpunkt und über Raumkurven 4. Ordnung ohne Trisekanten verallgemeinern.

In § 1 untersuchen wir die singulären Punkte, die auf einer C_{n+1} vorkommen können. Im nächsten Paragraphen betrachten wir die Zentralprojektion einer Kurve der Ordnung $n+1$ und beweisen verschiedene Hilfssätze. § 3 enthält die Untersuchung von Kurven mit Doppelpunkt oder Spitze. Wir zeigen, dass eine C_{n+1} mit Doppelpunkt 0,1 oder 2 (verallgemeinerte) Wendepunkte enthält, während eine C_{n+1} mit Spitze immer einen Wendepunkt enthält. In § 4 zeigen wir, dass eine geschlossene C_{n+1} immer $n+1$ Wendepunkte hat, wenn sie keine singulären Punkte anderer Art enthält. Hat die Kurve singuläre Punkte, die nicht Wendepunkte sind, so besteht eine einfache Relation zwischen den Anzahlen dieser singulären Punkte (siehe S. 13). Hat die Kurve im ganzen q singuläre Punkte, so setzt sie sich aus q Bögen n-ter Ordnung (Elementarbögen) zusammen. Endlich beweisen wir, dass die gefundene Relation zwischen den Anzahlen der singulären Punkte in dem Sinne für die betrachteten Kurven charakteristisch ist, dass eine C_{n+1} keine n linear abhängigen Punkte enthält, wenn die Relation für sie erfüllt ist. § 5 enthält einen Existenzbeweis für nicht-analytische Kurven der Ordnung $n+1$ mit vorgeschriebenen singulären Punkten; diese Kurven lassen sich als Zentralprojektionen von geschlossenen Kurven der Ordnung $n+1$ im $\mathfrak{R}^{n+1}$ gewinnen.

In § 6 wenden wir die gefundenen Resultate auf ebene Kurven von der konischen Ordnung 5 oder 6 an, d. h. auf Kurven, die von einem beliebigen Kegelschnitt in höchstens 5 oder 6 Punkten geschnitten werden. Es erweist sich hier als bequem, die Ebene auf die Veronesesche Fläche abzubilden, wobei die ebenen Kurven in Raumkurven 5. oder 6. Ordnung in einem projektiven $\mathfrak{R}^5$ übergehen. Es zeigt sich hier, dass ein Oval der konischen Ordnung 6 genau 6 sextaktische Punkte enthält und aus 6 Bögen der konischen Ordnung 5 besteht. Zugleich wird dargetan, dass eine geschlossene kubische Kurve der konischen Ordnung 6 ausser den 3 Wendepunkten 3 eigentliche sextaktische Punkte enthält.

§ 1. Singuläre Punkte.

Eine stetige Kurve C_{n+1} im $\mathfrak{R}^n$ heisst von $(n+1)$-ter Ordnung, wenn es einen $\mathfrak{R}^{n-1}$ (eine Hyperebene) gibt, der $n+1$ verschiedene Punkte mit der Kurve gemeinsam hat, und wenn keine Hyperebene mehr als $n+1$ Punkte der Kurve enthält.

Von einer solchen Kurve hat O. Haupt (4) gezeigt, dass sie aus einer endlichen Anzahl Elementarbögen, d. h. Bögen von n-ter Ordnung besteht. In einem inneren Punkt eines solchen Bogens existiert eindeutig sowohl eine rechtsseitige als auch eine linksseitige Tangente, ebenso eine rechtsseitige und eine linksseitige Schmiegebene usw., und höchstens in einer abzählbaren Menge von Kurvenpunkten fallen die rechtsseitigen und linksseitigen oskulierenden Mannigfaltigkeiten nicht zusammen.

Wir wollen nun über die zu betrachtenden geschlossenen Kurven C_{n+1} folgende Voraussetzung machen:

I Die C_{n+1} soll in jedem Punkt P eine eindeutige Tangente $\tau^1(P)$, eine eindeutige Schmiegebene $\tau^2(P)$ . . . , eine eindeutige Schmieghyperebene $\tau^{n-1}(P)$ haben.

Aus dieser Bedingung folgt, dass die beiden Halbtangenten, die beiden Schmieghalbebenen usw. in jedem Kurvenpunkt gleich oder entgegengesetzt gerichtet sind und ferner, dass sämtliche oskulierende Mannigfaltigkeiten stetig mit P variieren (Scherk (12) S. 305).

Jeder innere Punkt P eines Elementarbogens heisse regulärer Punkt. Ein singulärer Punkt kann auftreten, wo zwei Elementarbögen zusammentreffen. Untersuchungen über diese singulären Punkte verdankt man F. DENK (3) und P. SCHERK ((11) und (12)). Jedem Punkt ist eine Charakteristik zugeordnet, die aus n Zahlen $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$ besteht, von denen jede den Wert 1 oder 2 hat. Die Zahl a_0 hat den Wert 1 oder 2, je nachdem die Halbtangenten in P entgegengesetzt oder gleich gerichtet sind. Zur Bestimmung von $a_k (k = 1, 2, \ldots, n-1)$ lege man eine Hyperebene durch $\tau^{k-1}(P)$, die nicht zugleich $\tau^k(P)$ enthält, kurz eine Hyperebene, die genau $\tau^{k-1}(P)$ enthält, und ferner eine Hyperebene, die genau $\tau^k(P)$ enthält. Sind diese Hyperebenen beide Stützebenen oder beide schneidende Ebenen, so setzt man $a_k = 2$. Haben die Ebenen verschiedenen Charakter, so setzt man $a_k = 1$. (Unter $\tau^0(P)$ verstehe man den Punkt P selbst.)

In einem regulären Punkt sind die genannten Hyperebenen bekanntlich abwechselnd schneidende Ebenen und Stützebenen; ein solcher Punkt erhält somit die Charakteristik $(1, 1, \ldots, 1)$. Für einen singulären Punkt wird mindestens eine der Zahlen $a_k = 2$. Im $\mathfrak{R}^n$ gibt es somit im ganzen 2^n Punkttypen, speziell in der Ebene 4, nämlich Konvexitätspunkte, Wendepunkte, Spitzen 1. und 2. Art, entsprechend den Charakteristiken (1,1), (1,2), (2,1), (2,2).

Die Charakteristik bestimmt die Ordnung ν des Punktes P durch die einfache Gleichung

$$\nu = a_0 + a_1 + \ldots + a_{n-1}.$$

Hieraus folgt dann, dass es auf Kurven $(n+1)$-ter Ordnung nur $n+1$ Typen von Punkten, nämlich die regulären Punkte und die n Typen singulärer Punkte gibt, wo ein einziges a den Wert 2 hat. Ist $a_0 = 2$, so heisst P eine Spitze, und ist $a_{n-1} = 2$, so heisst P ein Wendepunkt. Ist allgemein $a_k = 2$, so heisst der Punkt $(n-k)$-fach[1] singulär. Einen s-fach singulären Punkt bezeichnet man zweckmässig mit P_s. Dem Werte $s = 0$ entspricht dann ein regulärer Punkt. — Von einem regulären Punkt P_0 kann man zu einem s-fach singulären Punkt P_s kommen, indem man den einen der beiden von P_0 ausgehenden Kurven-

[1] nach SCHERK.

zweige in der oskulierenden $\tau^{n-s}(P_0)$ spiegelt, während der andere fest bleibt.

Im Fall $n = 3$ treten 3 Formen singulärer Punkte auf: Wendepunkte, doppelt-singuläre Punkte und Spitzen.

Durch Projektion eines Punktes P mit gegebener Charakteristik auf eine Hyperebene ergibt sich ein Punkt P', dessen Charakteristik leicht zu bestimmen ist (Scherk (12), S. 292). Von Scherks allgemeinen Resultaten benutzen wir die folgenden:

1) Projiziert man einen s-fach singulären Punkt P_s $(s = 1, 2, \ldots, n)$ von einem ausserhalb von $\tau^{n-1}(P_s)$ gelegenen Punkt O, so erhält man einen $(s-1)$-fach singulären Punkt P'_{s-1}. Die Projektion eines regulären Punktes ist wieder ein regulärer Punkt.

Dies folgt unmittelbar daraus, dass die Charakteristik der Projektion $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-2})$ ist.

2) Projiziert man einen s-fach singulären Punkt P_s $(s = 0, 1, \ldots, n-1)$ von dem Punkte selbst, so erhält man wieder einen s-fach singulären Punkt P'_s. Die Projektion einer Spitze vom Punkt selbst ist ein regulärer Punkt.

Dies folgt unmittelbar daraus, dass die Charakteristik der Projektion $(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})$ ist.

3) Projiziert man einen regulären Punkt P_0 von einem Punkt O, der in $\tau^{n-1}(P_0)$, aber nicht in $\tau^{n-2}(P_0)$ liegt, so erhält man einen Wendepunkt.

Dies folgt aus der allgemeinen Scherkschen Regel.

Falls zwei Kurvenzweige durch denselben Punkt P gehen, heisst P ein Doppelpunkt. Ein Doppelpunkt wird zweifach gezählt, da zwei verschiedene Parameterwerte zu dem Punkt gehören. — Auf beiden Kurvenzweigen ist P ein regulärer Punkt.

§ 2. Zentralprojektionen einer C_{n+1}.

Die Projektion einer geschlossenen C_{n+1}, die die Bedingung I erfüllt, auf eine Hyperebene α^{n-1} ist wieder eine geschlossene Kurve C', die die Bedingung I erfüllt. Liegt das Projektionszentrum Q auf der Kurve selbst, so ist die Ordnung von C' gleich $n-1$ oder n. Der erste Fall trifft ein, wenn Q ein Doppelpunkt oder eine Spitze ist. Dann hat nämlich eine beliebige Hyperebene durch Q ausser Q höchstens $n-1$ Punkte mit der C_{n+1} gemeinsam. Die Projektion C'_{n-1} ist also eine geschlossene Kurve $(n-1)$-ter Ordnung im α^{n-1}, d. h. eine geschlossene Elementarkurve. Hieraus folgt sofort, dass die C_{n+1} höchstens einen Doppelpunkt oder eine Spitze enthält.

Ist das Projektionszentrum weder Spitze noch Doppelpunkt, so hat C' die Ordnung n. Legt man nämlich durch Q und $n-1$ weitere Punkte der C_{n+1} eine Hyperebene, so hat diese entweder noch einen Punkt mit der C_{n+1} gemeinsam oder sie enthält die Tangente in einem der gegebenen Punkte. Durch die Projektion erhält man eine C', von der n Punkte oder $n-1$ Punkte und eine Tangente in der Spur $\mathfrak{R}^{n-2}$ der Hyperebene im α^{n-1} liegen. In keinem dieser Fälle kann C' die Ordnung $n-1$ haben.

Auf der C_{n+1} gibt es definitionsgemäss $n+1$ linear abhängige Punkte, d. h. $n+1$ Punkte, die in derselben Hyperebene liegen. Bei einigen Typen von C_{n+1} gibt es schon n linear abhängige, also in einem $\mathfrak{R}^{n-2}$ gelegene Kurvenpunkte, während andere die folgende Bedingung erfüllen:

II Es gibt keinen $\mathfrak{R}^{n-2}$, der mehr als $n-1$ Punkte der Kurve enthält.

Wenn die C_{n+1} die Bedingung II nicht erfüllt, wenn also ein $\mathfrak{R}^{n-2}$ durch n Kurvenpunkte existiert, können Doppelpunkte, Trisekanten usw. auftreten, so dass für $k = 0, 1, \ldots, n-1$ ein $\mathfrak{R}^k$ mit der Kurve $k+2$ Punkte gemein haben kann. Diese Zahl ist natürlich auch maximal, da die Ordnung der Kurve $n+1$ ist. In bezug auf die Anzahlen dieser speziellen Punkte, Geraden, Ebenen ... haben wir gesehen, dass es höchstens einen Doppelpunkt geben kann. Was die Trisekanten angeht, so kann für $n = 3$ durch jeden Kurvenpunkt höchstens eine gehen, und für $n \geqq 4$ existiert überhaupt höchstens eine Trisekante. Gäbe es nämlich zwei, so hätte ein $\mathfrak{R}^3$ durch diese beiden Geraden 6 Punkte mit der Kurve gemein. Hierbei ist allerdings vorauszusetzen, dass die Kurve keinen Doppelpunkt hat. Setzt man voraus, dass es keine $k+1$ linear abhängigen Kurvenpunkte gibt, so kann man auf entsprechende Weise zeigen, dass es für

$k \leqq \frac{n}{2} - 1$ höchstens einen $\mathfrak{R}^k$ gibt, der $k+2$ Kurvenpunkte enthält. Ist k grösser, so können unendlich viele $\mathfrak{R}^k$ durch $k+2$ Punkte auftreten. Für $k = n - 2 \geqq 1$ wollen wir den folgenden Satz beweisen:

Hilfssatz 1. Falls ein $\mathfrak{R}^{n-2}$ existiert, der n Punkte der C_{n+1} enthält, darunter den Punkt P, der kein Doppelpunkt ist, so gibt es mindestens einen $\mathfrak{R}_1^{n-2}$ von derselben Art durch jeden Punkt P_1 der Kurve, der genügend nahe bei P liegt.

Wir werden, mit anderen Worten, beweisen, dass diese $\mathfrak{R}^{n-2}$ nicht isoliert sind. Hat die Kurve den Doppelpunkt D, so ist jeder $\mathfrak{R}^{n-2}$ durch D und $n-2$ andere Kurvenpunkte von der genannten Art (es gibt übrigens auch keine anderen), und der Satz ist offensichtlich richtig. Die Kurve habe nun also keinen Doppelpunkt. Der Satz ist bekannt für $n = 3$ (Scherk (10)). Wir nehmen daher $n \geqq 4$ an und beweisen ihn durch Induktion.

Ein $\mathfrak{R}^{n-2}$ gehe durch n Punkte der C_{n+1}, darunter den Punkt P und einen Punkt Q, von dem man, da die Kurve höchstens eine Trisekante hat ($n \geqq 4$), annehmen kann, dass er nicht auf der eventuellen Trisekante durch P liegt. Von Q projiziere man die C_{n+1} auf eine Hyperebene α^{n-1} in eine C_n', die $n-1$ Punkte in der Spur $\mathfrak{R}^{n-3}$ des $\mathfrak{R}^{n-2}$ in der Hyperebene hat. Keiner dieser $n-1$ Punkte kann in die Spur Q' der Tangente $\tau^1(Q)$ fallen. Enthielte nämlich der $\mathfrak{R}^{n-2}$ durch n Punkte die Tangente in einem von diesen, so würde ein $\mathfrak{R}^{n-1}$ durch den $\mathfrak{R}^{n-2}$ und einen weiteren Punkt $n+1$ Punkte der Kurve und die Tangente in einem von diesen Punkten enthalten, was ausgeschlossen ist. Da die Projektion P' von P nicht Doppelpunkt der C_n' ist, geht durch jeden P' genügend benachbarten Punkt P_1 nach der Induktionsvoraussetzung ein weiterer $\mathfrak{R}_1^{n-3}$ durch $n-1$ Punkte der C_n', und der Punkt P_1' kann so nahe bei P' gewählt werden, dass keiner der anderen dem $\mathfrak{R}_1^{n-3}$ angehörenden Kurvenpunkte in Q' fällt. Diesen neuen $n-1$ Punkten der C_n' entsprechen $n-1$ der C_{n+1}, darunter der P_1' entsprechende Punkt P_1, der zu P benachbart ist. Ein $\mathfrak{R}_1^{n-2}$, der durch den $\mathfrak{R}_1^{n-3}$ und Q bestimmt ist, enthält dann n Punkte der C_{n+1} und unter diesen einen Nachbarpunkt von P. Hiermit ist der Satz bewiesen.

Wir wollen nun eine Kurve C_{n+1} betrachten, für welche die Bedingung II erfüllt ist. Für eine solche Kurve kann kein $\mathfrak{R}^k$ für $k = 0, 1, 2, \ldots, n-2$ mehr als $k+1$ Punkte der Kurve enthalten, oder anderes ausgedrückt, k Punkte können nur dann linear abhängig sein, wenn $k = n+1$. Ein $\mathfrak{R}^{k-2}$ durch k Punkte würde nämlich mit $n-k$ weiteren Punkten einen $\mathfrak{R}^{n-2}$ durch n Punkte der Kurve bestimmen. Diese Kurven enthalten also weder Doppelpunkte noch Trisekanten, Ebenen durch 4 Punkte usw.

Für diese Kurven soll nun der folgende Satz bewiesen werden

Hilfssatz 2. Projiziert man eine C_{n+1}, die die Bedingung II erfüllt, von einem Punkt Q der Kurve auf eine Hyperebene α^{n-1}, so erhält man eine C', die wieder die Bedingung II erfüllt.

Falls Q eine Spitze ist, ist der Satz einleuchtend. Ist Q keine Spitze, so wird C' von n-ter Ordnung in der α^{n-1}. Wir wollen annehmen, dass die C'_n die Bedingung II nicht erfüllt, und dass ein $\mathfrak{R}^{n-3}$ durch $n-1$ Punkte der C'_n geht. Nach Hilfssatz 1 können wir dafür sorgen, dass keiner dieser Punkte in die Spur Q' der Tangente in Q fällt. Ein $\mathfrak{R}^{n-2}$ durch den $\mathfrak{R}^{n-3}$ und Q hat dann im ganzen n Punkte auf der C_{n+1} gegen die Voraussetzung.

§ 3. Die C_{n+1} mit Spitze oder Doppelpunkt.

Wegen der besonderen Verhältnisse, die eintreten, wenn eine C_{n+1} von einer Spitze oder einem Doppelpunkt projiziert wird, ist es bequem, die Kurven mit Spitze oder Doppelpunkt für sich zu betrachten.

Da die Projektion der Kurve von einer Spitze oder einem Doppelpunkt eine geschlossene Kurve $(n-1)$-ter Ordnung im α^{n-1}, also eine Elementarkurve ist, auf der alle Punkte regulär sind, folgt aus dem unter 1), § 1 zitierten Resultat von Scherk:

Auf einer C_{n+1} mit Spitze oder Doppelpunkt können nur Wendepunkte als singuläre Punkte auftreten.

Wir behandeln zuerst die C_{n+1} mit Spitze und beweisen durch Induktion

Satz 1. Eine C_{n+1} mit Spitze enthält ausserdem genau einen Wendepunkt.

Der Satz ist richtig für $n = 2$. Die oskulierende Hyperebene in P hat, falls P ein regulärer Punkt ist, noch einen Punkt Q mit der Kurve gemeinsam. Ist P Spitze oder Wendepunkt, so hat die Hyperebene nur P mit der Kurve gemeinsam, da ein singulärer Punkt von $(n+1)$-ter Ordnung ist. Q variiert stetig mit P, und wenn P sich von einer Spitze oder einem Wendepunkt aus bewegt, so bewegt sich Q in entgegengesetzter Richtung, da die Bögen, die von dem singulären Punkt ausgehen, beide von n-ter Ordnung sind. — Projiziert man die Kurve von Q aus, so erhält man eine Kurve C_n' mit Spitze und daher mit genau einem Wendepunkt. Dieser Wendepunkt muss das Bild eines Punktes P auf der C_{n+1} sein, dessen oskulierende Hyperebene den Punkt Q enthält. Die Korrespondenz P, Q ist somit eineindeutig, und, da P und Q sich in der Umgebung der Spitze entgegengesetzt bewegen, ist sie überall gegenläufig. P und Q fallen daher noch genau einmal zusammen, und zwar in dem Wendepunkt der C_{n+1} (vgl. Juel (6)).

Bei Kurven mit Doppelpunkt sind die Verhältnisse nicht so einfach. Der Doppelpunkt D teilt die Kurve in zwei Teile, die sogenannten Pseudozweige. Es gilt offenbar

Satz 2. Eine C_{n+1} mit Doppelpunkt hat für gerades n einen Pseudozweig von gerader (n-ter) Ordnung und einen von ungerader ($(n+1)$-ter) Ordnung. Falls n ungerade ist, haben beide Pseudozweige entweder ungerade (n-te) Ordnung oder beide gerade ($(n+1)$-te) Ordnung.

Eine ebene C_3 mit Doppelpunkt hat einen Wendepunkt auf dem Pseudozweig ungerader Ordnung, während eine C_4 mit Doppelpunkt keinen Wendepunkt hat, wenn beide Pseudozweige von ungerader Ordnung sind, hingegen je einen Wendepunkt auf den beiden eventuellen Pseudozweigen gerader Ordnung

(Juel (6)). — Wie der folgende Satz zeigt, bleiben diese Verhältnisse für beliebiges gerades und ungerades n erhalten:

Satz 3. Eine C_{n+1} mit Doppelpunkt hat bei geradem n einen Wendepunkt auf dem Pseudozweig ungerader Ordnung. Bei ungeradem n gibt es keinen Wendepunkt, wenn die Pseudozweige ungerade Ordnung haben, und auf jedem der beiden Pseudozweige einen, wenn diese gerade Ordnung haben.

Der Satz ist richtig für $n = 2$. Wir nehmen zunächst n ungerade an. Wenn beide Pseudozweige ungerade, also n-te Ordnung haben, sind sie Elementarbögen und daher ohne singuläre Punkte. Nun sei P ein Punkt auf einem Pseudozweig gerader, also $(n+1)$-ter Ordnung. Die oskulierende Hyperebene in P schneidet denselben Zweig in einem weiteren Punkt Q. Projiziert man die Kurve von Q auf eine feste Hyperebene, so erhält man eine C'_n mit Doppelpunkt, die aus einem Zweig von gerader Ordnung ohne singuläre Punkte und einem Zweig ungerader Ordnung mit Wendepunkt besteht. Der letztere Zweig ist die Projektion desjenigen Teils der C_{n+1}, auf dem Q liegt; und dem Wendepunkt in der Projektion entspricht ein Punkt P, für welchen $\tau^{n-1}(P)$ den Punkt Q enthält. Die Korrespondenz P, Q ist dann eineindeutig, und wie oben findet man genau einen Wendepunkt auf dem betreffenden Pseudozweig gerader Ordnung.

Nehmen wir nun n gerade an, so ist der Pseudozweig gerader Ordnung singularitätenfrei (als Elementarbogen). Projiziert man die Kurve von einem Punkt auf dem Zweig ungerader Ordnung aus, so geht dieser Zweig in einen Pseudozweig gerader Ordnung der C'_n über, auf welchem sich ja gerade ein Wendepunkt befindet, und wie oben ergibt sich dann auch die Existenz eines Wendepunktes auf dem Pseudozweig ungerader Ordnung der C_{n+1}.

§ 4. Die C_{n+1}, die die Bedingung II erfüllen.

Wir gehen nun zu unserer eigentlichen Aufgabe über, die geschlossenen Kurven $(n+1)$-ter Ordnung im $\mathfrak{R}^n$, die keine n

linear abhängigen Punkte enthalten, zu untersuchen. Als Hilfsmittel zur Bestimmung der Anzahlen singulärer Punkte benutzen wir wie in § 3 die Korrespondenz P, Q, wo Q als Schnittpunkt von $\tau^{n-1}(P)$ mit der Kurve C_{n+1} bestimmt ist[1]. Ist P ein regulärer Punkt, so ist Q von P verschieden; ist P aber singulär, also von $(n+1)$-ter Ordnung, so fällt Q in P. Die singulären Punkte sind also die Fixpunkte der Abbildung $P \to Q$. Die Abbildung ist stetig, und in der Umgebung eines Fixpunktes variieren P und Q gegenläufig, da die Bögen, die in dem singulären Punkt zusammenstossen, beide von n-ter Ordnung (Elementarbögen) sind.

Entscheidend bei der Anwendung dieser Korrespondenz ist die Anzahl der Punkte P, die jedem Q entsprechen, mit anderen Worten die Umlaufszahl der Abbildung. In § 3 traten nur eineindeutige Abbildungen auf, während dies im folgenden nur ausnahmsweise der Fall sein wird.

Wir wollen nun zunächst annehmen, dass die betrachtete Kurve C_{n+1} keine anderen singulären Punkte als W e n d e p u n k t e enthält. Für $n = 2$ gibt es 3 Wendepunkte, für $n = 3$ gibt es 4 Wendepunkte. Dies führt uns zu dem folgenden allgemeinen

Satz 4. *Eine geschlossene Kurve C_{n+1}, die die Bedingungen I und II erfüllt, und die keine anderen singulären Punkte als Wendepunkte enthält, hat $n+1$ Wendepunkte.*

Der Satz ist richtig für $n = 2$. Wir nehmen ihn als richtig für eine C_n der n-ten Ordnung im $\mathfrak{R}^{n-1}$ an. Wir projizieren die C_{n+1} von einem ihrer Punkte Q_0 auf eine Hyperebene α^{n-1} und erhalten eine C'_n, die ebenfalls I und II erfüllt, und die daher n Wendepunkte besitzt. Diese n Wendepunkte entsprechen auf der C_{n+1} gewissen n Punkten P, für welche $\tau^{n-1}(P)$ den Punkt Q_0 enthält. Falls einer der Wendepunkte der C'_n in die Spur Q'_0 der Tangente in Q_0 fällt, so bedeutet dies nur, dass Q_0 selbst Wendepunkt der C_{n+1} ist, so dass einer der n Punkte P in Q_0 liegt. Somit entsprechen jedem Punkt Q i m m e r n v e r s c h i e d e n e

[1] Q kann wegen der Bedingung II nicht in $\tau^{n-2}(P)$ liegen, was man leicht durch Induktion einsieht.

Punkte P. Hieraus folgt, dass die Abbildung $P \to Q$ monoton ist. Wir wollen nun annehmen, dass der Punkt Q_0 und die n Punkte $P_1, P_2, \ldots, P_n$ in der genannten Reihenfolge auf der Kurve liegen. Bewegt sich P von P_1 nach P_2, so durchläuft Q die ganze Kurve einmal, und auf dem Bogen liegt daher mindestens ein Wendepunkt. P und Q haben in der Umgebung dieses Wendepunktes und daher überall entgegengesetzte Umlaufsrichtung. Auf jedem der Bögen $P_1P_2, P_2P_3, \ldots, P_nQ_0, Q_0P_1$ gibt es also genau einen Wendepunkt, im ganzen $n+1$. (Die Umlaufszahl der Abbildung ist $-n$.)

Der obige Satz 4 ist ein Spezialfall des folgenden Satzes über Kurven mit Punkten $S_1, S_2, \ldots, S_n$, die bzw. 1-fach, 2-fach, ... n-fach singulär sind:

Satz 5. Für eine geschlossene C_{n+1}, die die Bedingungen I und II erfüllt, und die p_1 Punkte S_1, p_2 Punkte $S_2, \ldots, p_n$ Punkte S_n enthält, gilt die Gleichung

$$s_n = p_1 + 2p_2 + \ldots + np_n = n + 1. \tag{1}$$

Falls nur p_1 von 0 verschieden ist, geht Satz 5 in Satz 4 über. Ist speziell $p_n = 1$, hat die Kurve also eine Spitze, so hat sie nach Satz 1 genau einen Wendepunkt, d. h. $p_1 = 1$, während die übrigen p_k gleich 0 sind. Satz 5 umfasst auch Satz 1 und ist also für $p_n = 1$ bewiesen.

Satz 5 ist richtig für $n = 2$, wo nur die beiden folgenden Möglichkeiten vorliegen: eine C_3 mit 3 Wendepunkten und eine C_3 mit Spitze und einem Wendepunkt. Der Satz sei nun richtig für jede C_n, die I und II befriedigt. Es genügt, eine C_{n+1} ohne Spitze zu betrachten. Wir nehmen nun an, es gäbe p_2 Punkte S_2, p_3 Punkte $S_3, \ldots, p_n\,(=0)$ Punkte S_n und wollen zeigen, dass man die Anzahl p_1 der Wendepunkte aus Gleichung (1) finden kann. Man projiziere die C_{n+1} von einem regulären Punkt Q aus auf eine Hyperebene α^{n-1} in eine Kurve C'_n, die I und II erfüllt. Nach § 1 erhält die C'_n hierbei p_2 Wendepunkte S'_1, p_3 Punkte $S'_2, \ldots, p_n$ Punkte S'_{n-1}. Ausserdem entsteht eine Anzahl Wendepunkte, die von Punkten auf der C_{n+1} herrühren, deren oskulierende Hyperebenen Q enthalten. Diese Anzahl sei p'_1.

Zwischen diesen Anzahlen besteht nun nach Induktionsvoraussetzung die Relation

$$(2) \qquad s_{n-1} = (p_1' + p_2) + 2\,p_3 + \ldots + (n-1)\,p_n = n.$$

Die Anzahl p_1' ändert sich nicht, wenn Q in einen singulären Punkt der C_{n+1}, z. B. in S_k fällt. Die Anzahl p_{k+1} der Punkte S_k' wird um 1 erhöht, während die Anzahl p_k der Punkte S_{k-1}' zugleich um 1 vermindert wird, wodurch die Anzahl der Punkte P auf der C_{n+1}, deren oskulierende Hyperebene Q enthält, scheinbar um 1 vermindert wird. Da aber S_k gleichzeitig ein Fixpunkt der Abbildung $P \to Q$ ist, muss auch dieser Punkt zu den P-Punkten gerechnet werden, d. h. die Anzahl bleibt doch erhalten.

Die Kurve C_{n+1} enthält singuläre Punkte; gibt es nämlich keine Punkte S_k, $k \geqq 2$, so gibt es Satz 4 zufolge $n+1$ Wendepunkte S_1. Die Punkte P und Q haben dann überall entgegengesetzte Umlaufsrichtung, und es gibt infolgedessen $p_1' + 1$ Fixpunkte in der Korrespondenz, also $p_1' + 1$ singuläre Punkte auf der C_{n+1}. Von diesen singulären Punkten sind $p_2 + p_3 + \ldots + p_n$ nicht Wendepunkte. Die Anzahl p_1 der Wendepunkte wird dann

$$(3) \qquad p_1 = (p_1' + 1) - (p_2 + p_3 \ldots + p_n).$$

Setzt man hierin den aus Gleichung (2) gefundenen Wert von p_1' ein und ordnet die Gleichung um, so erhält man gerade Gleichung (1). — Wir werden später eine geometrische Deutung der Relation (1) angeben.

Durch diesen Satz haben wir Klarheit über die mögliche Verteilung der singulären Punkte auf einer C_{n+1} ohne n linear abhängige Punkte gewonnen. Zwischen zwei auf einander folgenden singulären Punkten ist die Kurve singularitätenfrei und folglich monoton. Wir wollen zeigen, dass ein solcher Bogen nicht nur monoton, sondern sogar ein Elementarbogen (von n-ter Ordnung) ist.

Die C_{n+1} habe $q = p_1 + p_2 + \ldots + p_n$ singuläre Punkte, die in der durch die Anordnung auf der Kurve gegebenen Reihefolge mit S', S'', . . ., $S^{(q)}$ bezeichnet seien. Wenn P sich auf dem monotonen Bogen $S'S''$ bewegt, durchläuft der entsprechende Punkt Q den komplementären Bogen von S' nach S'' und analog, wenn sich P von S'' nach S''' bewegt, usw. Hieraus folgt, dass die oskulierende Hyperebene in einem Punkt P, der auf einem der monotonen Bögen zwischen zwei auf einander folgenden singulären Punkten gelegen ist, diesen Bogen nicht wieder schneidet. Mit anderen Worten: Zwischen zwei korrespondierenden Punkten P und Q gibt es immer mindestens einen singulären Punkt. Dieser Satz kann als Spezialfall des folgenden Satzes aufgefasst werden:

Satz 6. Enthält eine Hyperebene $n+1$ Punkte P_1, . . ., P_{n+1} der Kurve C_{n+1} und liegen diese in der angegebenen Reihenfolge auf der Kurve, so gibt es auf dem Bogen $P_1P_2 \ldots P_{n+1}$ stets mindestens einen singulären Punkt.

Der Satz ist richtig für $n = 2$. Die Kurve C_3 ist nämlich aus höchstens 3 konvexen Bögen zusammengesetzt. Wir nehmen an, der Satz sei richtig für jede C_n und projizieren die C_{n+1} vom Punkte P_{n+1} aus auf eine Hyperebene in eine Kurve C'_n, die von n-ter Ordnung ist, da P_{n+1} keine Spitze sein kann. Durch Projektion der n Punkte P_1, P_2, . . ., P_n entstehen n Punkte P'_1, P'_2, . . ., P'_n auf der C'_n, die auf dieser Kurve in der angegebenen Reihenfolge liegen. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es auf dem Bogen $P'_1P'_2 \ldots P'_n$ mindestens einen singulären Punkt S'. Wenn dieser mindestens zweifach singulär ist, so ist S selbst ein singulärer Punkt auf dem Bogen $P_1P_2 \ldots P_n$, also umso mehr auf dem Bogen $P_1P_2 \ldots P_{n+1}$. Ist S' dagegen Wendepunkt, so enthält $\tau^{n-1}(S)$ den Punkt P_{n+1}, und dann gibt es auf dem Bogen SP, der in dem Bogen $P_1P_2 \ldots P_{n+1}$ enthalten ist, einen singulären Punkt.

Da eine Hyperebene also nicht $n+1$ Schnittpunkte mit der C_{n+1} haben kann, die auf einem und demselben Bogen zwischen zwei singulären Punkten liegen, muss jeder derartige monotone Bogen von n-ter Ordnung sein. Hieraus folgt

Satz 7. Eine C_{n+1} mit q singulären Punkten ist aus q Elementarbögen zusammengesetzt.

Speziell sieht man, dass eine C_{n+1} mit $n+1$ Wendepunkten aus $n+1$ Elementarbögen besteht. Für $n = 3$ ist dies ohne Beweis von Courtand (2) behauptet worden.

Für $n = 3$ heben wir hervor

Satz 8. Raumkurven 4. Ordnung ohne Trisekanten können in 4 Typen eingeteilt werden. Es können 4 Wendepunkte, 2 Wendepunkte und ein doppelt-singulärer Punkt, 2 doppelt-singuläre Punkte oder ein Wendepunkt und eine Spitze auftreten. Die Kurve besteht aus 4, 3, 2, bzw. 2 Elementarbögen.

Besonders interessant ist der dritte Typus. Die Kurve ist hier aus 2 Bögen 3. Ordnung zusammengesetzt, die im selben Sinne gewunden sind. Die Kurve ist also, abgesehen von den beiden singulären Punkten, monoton. — Eine algebraische Kurve dieser Art erhält man nicht als Schnitt zweier Flächen zweiten Grades, sondern als Schnitt einer kubischen Fläche mit einer Fläche zweiten Grades. Legt man durch zwei Erzeugende derselben Schar einer Fläche zweiten Grades eine kubische Fläche, für welche zwei andere Erzeugende derselben Schar Wendetangenten sind, so ist die Schnittkurve der Flächen eine solche C_4. — Man kann sie auch durch Projektion einer algebraischen C_4 im $\mathfrak{R}^4$ von einem Schnittpunkt zweier Schmiegebenen erhalten (siehe § 5).

Wir haben oben gezeigt, dass eine C_{n+1}, die den Bedingungen I und II genügt, singuläre Punkte verschiedener Art hat, deren Anzahlen die Gleichung (1) befriedigen. Umgekehrt wollen wir nun zeigen, dass diese Relation (1) für Kurven $(n+1)$-ter Ordnung, die keine n linear abhängigen Punkte enthalten, charakteristisch ist. Wir haben zu beweisen:

Satz 9. Wenn eine C_{n+1} der Bedingung I genügt und singuläre Punkte hat, die nach Anzahl und Art die Gleichung

$$s_n = p_1 + 2p_2 + \ldots + np_n = n + 1 \tag{1}$$

befriedigen, so genügt die C_{n+1} auch der Bedingung II.

Wir beweisen den Satz unter der scheinbar schwächeren Voraussetzung $s_n \geqq n+1$, wobei jedoch zu bemerken ist, dass das Ungleichheitszeichen von selbst fortfällt, wenn der Satz unter dieser Voraussetzung gilt. Denn dann erfüllt die C_{n+1} ja die Bedingungen I und II.

Der Satz ist richtig für $n=2$, $s_2 \geqq 3$, da eine Kurve mit Spitze oder mit 3 Wendepunkten doppelpunktfrei ist, und für eine Kurve mit Doppelpunkt ist $s_2 = 1$.

Nehmen wir nun an, die Bedingung II sei für jede C_n, für welche $s_{n-1} \geqq n$ ist, erfüllt ($n \geqq 3$).

Die C_{n+1} muss doppelpunktfrei sein. Sonst wäre nämlich $s_n = 0$, 1 oder 2, während s_n mindestens 3 sein sollte. — Die C_{n+1} habe nun $q = p_1 + p_2 + \ldots + p_n$ singuläre Punkte. Die Korrespondenz P, Q hat dann q Fixpunkte, und da P und Q von jedem singulären Punkt aus gegenläufig variieren, muss Q die Kurve $(q-1)$-mal durchlaufen, wenn P die Kurve einmal durchläuft. Durch jeden Punkt Q gehen folglich $r \geqq q-1$ oskulierende Hyperebenen der Kurve. Wir projizieren nun die C_{n+1} von dem regulären Punkt Q aus auf eine feste Hyperebene α^{n-1}, wodurch eine C_n' entsteht, die der Bedingung I genügt. Auf dieser Kurve gibt es $r + p_2$ Wendepunkte, p_3 singuläre Punkte S_2', ..., p_n singuläre Punkte S_{n-1}'. Für die Grösse s_{n-1} ergibt sich

$$s_{n-1} = (r + p_2) + 2p_3 + \ldots + (n-1)\,p_n.$$

Da nun

$$r \geqq q - 1 = p_1 + p_2 + \ldots + p_n - 1$$

ist, wird

$$s_{n-1} \geqq p_1 + 2p_2 + \ldots np_n - 1$$

oder

$$s_{n-1} \geqq s_n - 1 \geqq n.$$

Mit anderen Worten: Die durch Projektion entstandene Kurve C_n' befriedigt dieselbe Bedingung $s_k \geqq k+1$ wie die ursprüngliche Kurve. Hieraus folgt z. B., dass die C_n' keinen Doppelpunkt, also die C_{n+1} keine Trisekante besitzt. Es folgt aber überhaupt, dass die Bedingung II für die C_{n+1} erfüllt ist. Man nehme nämlich an, es gäbe einen $\mathfrak{R}^{n-2}$ durch n Punkte der gegebenen Kurve. Einer dieser Punkte kann als regulär vorausgesetzt werden, da man gegebenenfalls zu einem benachbarten

$\mathfrak{R}^{n-2}$ durch n Punkte, von denen wenigstens einer regulär ist, übergehen könnte. Durch Projektion der C_{n+1} von diesem Punkt aus erhielte man eine C'_n, für welche $s_{n-1} \geqq n$ ist, und die $n-1$ Punkte mit einem $\mathfrak{R}^{n-3}$ gemein hat, was der Induktionsvoraussetzung widerspräche.

Hiermit ist der Satz bewiesen, und zugleich ergibt sich:

Satz 10. Wenn eine C_{n+1} die Bedingung I, aber nicht die Bedingung II erfüllt, so besteht zwischen den Anzahlen der singulären Punkte die Ungleichung

$$s_n = p_1 + 2p_2 + \ldots + np_n \leqq n-1\,.$$

Dass die rechte Seite sich von $n+1$ auf $n-1$ erniedrigt, ist eine Folge davon, dass die Anzahl der Wendepunkte immer dieselbe Parität haben muss.

Die obige Ungleichung hat sich für Kurven mit Doppelpunkt als richtig erwiesen, und sie gilt bekanntlich auch für Raumkurven 4. Ordnung mit Trisekanten. Da notwendigerweise $p_n = 0$ ist, kann die Ungleichung übrigens zu

$$s_n = p_1 + 2p_2 + \ldots + (n-1)\,p_{n-1} \leqq n-1$$

vereinfacht werden.

§ 5. Die Existenz der Kurven C_{n+1}.

Wir wollen nun zeigen, dass sämtliche verschiedenen Typen von Kurven $(n+1)$-ter Ordnung, die wir in § 4 betrachtet haben, und für die die Anzahlen der Singularitäten Gleichung (1) befriedigen, durch Projektion einer und derselben Kurve erzeugt werden können, nämlich einer Kurve $(n+1)$-ter Ordnung im $\mathfrak{R}^{n+1}$.

Es sei $\bar{C}_{n+1}$ eine solche geschlossene Elementarkurve im $\mathfrak{R}^{n+1}$. Wir wählen ein Projektionszentrum O ausserhalb der Kurve und projizieren auf eine Hyperebene (einen $\mathfrak{R}^n$), wodurch eine C_{n+1} in diesem $\mathfrak{R}^n$ entsteht. Falls O in einem oskulierenden $\tau^{n+1-k}(P)$ der Kurve $\bar{C}_{n+1}$, aber nicht in einem oskulierenden $\tau^{n-k}(P)$ liegt, ist die Projektion des Punktes P nach den allgemeinen Regeln ein k-fach singulärer Punkt auf der C_{n+1}.

Projizieren wir nun vom Schnittpunkt von $n+1$ oskulierenden Hyperebenen der $\bar{C}_{n+1}$ aus, so entsteht eine C_{n+1} mit $n+1$ Wendepunkten, und diese Anzahl ist — wie in § 4 gezeigt wurde — gerade kennzeichnend für einen der Kurventypen, die die Bedingung II erfüllen. Allgemeiner können wir die $\bar{C}_{n+1}$ vom Schnittpunkt von p_1 oskulierenden τ^n, p_2 oskulierenden τ^{n-1}, ..., p_n oskulierenden τ^1, d. h. Tangenten, aus projizieren, wo die Grössen p_ν der Relation

$$p_1 + 2p_2 + \ldots + np_n = n+1$$

genügen müssen. Wir erhalten dann eine C_{n+1} mit p_1 Wendepunkten, p_2 doppelt-singulären Punkten usw. Es gilt also

Satz 11. *Projiziert man eine geschlossene Kurve $(n+1)$-ter Ordnung im $\mathfrak{R}^{n+1}$ von einem Punkt O aus, durch den p_1 oskulierende τ^n der Kurve, p_2 oskulierende τ^{n-1}, ..., p_n Tangenten gehen, so entsteht eine C_{n+1} im $\mathfrak{R}_n$ mit p_1 Wendepunkten, p_2 doppelt-singulären Punkten, ..., p_n Spitzen, wobei zwischen den Anzahlen p_ν die Relation*

$$p_1 + 2p_2 + \ldots + np_n = n+1$$

besteht.

Bei dieser Projektion entstehen also alle wesentlichen Typen. Berücksichtigt man jedoch auch die Klasse der Kurve, so sind nicht alle möglichen Typen der C_{n+1} repräsentiert. So hat eine ebene C_3, die durch Projektion einer Raumkurve 3. Ordnung erzeugt wird, die Klasse 4, während auch ebene C_3 der Klasse 6 existieren.

Durch diese Projektionsmethode ist die *Existenz von Kurven der betrachteten Art, die nicht algebraisch, nicht einmal analytisch zu sein brauchen, gesichert.* Eine allgemeine Bestimmung der monotonen Bögen in Räumen von beliebig vielen Dimensionen hat J. Hjelmslev (5) durchgeführt, und man kann, wie Frl. Sauter (9) gezeigt hat, diese Bögen ordnungsfest schliessen, wodurch *nicht-analytische geschlossene Kurven* $(n+1)$-ter Ordnung im $\mathfrak{R}^{n+1}$ entstehen. Auch die in § 3 betrachteten Kurven $(n+1)$-ter Ordnung mit Doppelpunkt können durch Projektion einer $\bar{C}_{n+1}$ im $\Re^{n+1}$ erhalten werden. Ist n gerade, sind die Kurven also selbst von ungerader Ordnung, so hat man nur das Projektionszentrum auf einer Doppelsekante der $\bar{C}_{n+1}$ zu wählen. — Bei ungeradem n, also Kurven gerader Ordnung, lagen zwei Möglichkeiten vor. Man kann in diesem Fall erreichen, dass die Kurve $\bar{C}_{n+1}$ des $\Re^{n+1}$ ganz im Endlichen liegt. Wir konstruieren die konvexe Hülle der Kurve und betrachten eine Doppelsekante PQ der Kurve. Die Strecke PQ liegt ganz innerhalb der konvexen Hülle, während die Verlängerungen ausserhalb liegen. Jede Hyperebene durch einen Punkt auf der Strecke PQ schneidet die Kurve in mindestens 2 Punkten, während durch die Punkte der Verlängerungen der Strecke PQ Hyperebenen gelegt werden können, die keinen Punkt mit der Kurve gemeinsam haben. Im ersten Fall wird der Index der Projektion 2, im zweiten Fall 0. Projiziert man daher von einem Punkt auf der Strecke PQ, so erhält man eine C_{n+1} mit Doppelpunkt und ungeraden Pseudozweigen, während die Projektion von einem Punkt ausserhalb der Strecke Pseudozweige von gerader Ordnung ergibt.

§ 6. **Die Veronesesche Fläche. Ebene Kurven der konischen Ordnung 5 oder 6.**

Wir wollen nun einige der vorstehenden Resultate auf die Untersuchung von ebenen Kurven der konischen Ordnung 5 oder 6, d. h. Kurven, die von beliebigen Kegelschnitten in höchstens 5 bzw. 6 Punkten geschnitten werden, anwenden. Die ebenen Kurven werden auf Kurven abgebildet, die auf der Veroneseschen Fläche liegen, über die wir einige Bemerkungen vorausschicken.[1]

Wir bezeichnen mit (y_1, y_2, y_3) projektive Punktkoordinaten in der Ebene Π und mit $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ projektive Punktkoordinaten in einem 5-dimensionalen Raum $\Re^5$. Die Veronesesche Fläche wird in Parameterform durch

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 : x_5 : x_6 = y_1^2 : y_2^2 : y_3^2 : y_2 y_3 : y_3 y_1 : y_1 y_2$$

dargestellt. Wenn der Punkt Y die projektive Ebene Π durchläuft, so durchläuft der Punkt X die Veronesesche Fläche V.

1) Ähnliche Abbildungen sind von J. Hjelmslev herangezogen worden (5).

Von den wohlbekannten Eigenschaften der Fläche heben wir einige hervor. Einem Kegelschnitt in der Ebene Π entspricht offenbar die Schnittkurve von V mit einer Hyperebene im $\mathfrak{R}^5$. Zwei Kegelschnitte in der Ebene haben im allgemeinen 4 Punkte gemeinsam, woraus folgt, dass die Veronesesche Fläche eine algebraische Fläche 4. Grades ist, so dass die Flächenkurve, die einem ebenen Kegelschnitt entspricht, eine C_4 in einem $\mathfrak{R}^4$, also eine algebraische Elementarkurve (Normalkurve) im $\mathfrak{R}^4$ ist. Falls der $\mathfrak{R}^4$ die Fläche V berührt, hat die C_4 einen Doppelpunkt und zerfällt in zwei Kegelschnitte, die somit Bilder von zwei Geraden in Π sind, deren Schnittpunkt dem Berührungspunkt auf V entspricht. Einer Geraden in Π entspricht also ein Kegelschnitt auf V. Die Veronesesche Fläche enthält also ∞^2 Kegelschnitte, so dass zwei Punkte einen und nur einen Kegelschnitt bestimmen.

Während ein $\mathfrak{R}^3$ die Fläche im allgemeinen in höchstens 4 reellen Punkten schneidet, kann es vorkommen, dass ein solcher Raum einen ganzen Kegelschnitt mit V gemeinsam hat, nämlich dann, wenn die Hyperebenen, die den $\mathfrak{R}^3$ bestimmen, diesen Kegelschnitt enthalten. Dem entspricht in der Ebene Π, dass man zwei Kegelschnitte hat, die in zwei Geradenpaare mit einer gemeinsamen Geraden zerfallen. Die beiden anderen Geraden haben noch einen Schnittpunkt, der jedoch ebenfalls auf die gemeinsame Gerade fallen kann. Hieraus folgt, dass ein $\mathfrak{R}^3$ durch einen Kegelschnitt höchstens noch einen Punkt mit V gemeinsam hat.

Als dem obigen geht unmittelbar hervor, dass einer ebenen (geschlossenen) Kurve der konischen Ordnung p auf der Veroneseschen Fläche eine (geschlossene) Kurve p-ter (linearer) Ordnung entspricht.

Nehmen wir zunächst $p = 5$ an. Die ebene Kurve Γ muss dann ein konvexer Bogen sein. Gäbe es nämlich Geraden, die Γ in 3 oder mehr Punkten schneiden, so würden zwei dieser Geraden einen ausgearteten Kegelschnitt mit 6 Punkten auf Γ bestimmen. — Die entsprechende Kurve Γ' im $\mathfrak{R}^5$ ist von 5. Ordnung, also ein Elementarbogen. Einem Schmiegkegelschnitt von Γ entspricht auf der Veroneseschen Fläche eine Kurve C_4, die mit Γ gemeinsame oskulierende τ^4 hat. Aus bekannten Eigenschaften der Elementarbögen erhält man somit für Γ:

Ein (konvexer) Bogen der konischen Ordnung 5 hat in jedem Punkt sowohl einen vorderen als auch einen hinteren Schmiegkegelschnitt, die in einer höchstens abzählbaren Punktmenge von einander verschieden sind. Fallen die Kegelschnitte in jedem Punkt zusammen, so variieren sie stetig mit dem Punkt.

Ein Bogen der konischen Ordnung 5 heisse selbst ein (konischer) Elementarbogen. Wenn die Schmiegkegelschnitte stetig variieren, so ist Γ die einhüllende Kurve dieses Kegelschnittsystems. Man sieht hieraus, dass die Schmiegkegelschnitte eines konischen Elementarbogens in derselben Weise in einander liegen wie die Schmiegkreise eines ebenen konvexen Bogens der zyklischen Ordnung 3 (vgl. Blaschke (1), S. 34, Aufgabe 4).

Wir betrachten nun Kurven der konischen Ordnung 6, die also in Kurven 6. Ordnung auf V abgebildet werden. Auf diese Kurven können frühere Ergebnisse mit $n = 5$ angewendet werden. Aus dem Seite 4 genannten Satz von Haupt ergibt sich, dass eine Kurve der konischen Ordnung 6 aus einer endlichen Anzahl konischer Elementarbögen besteht. Dieses Ergebnis folgt jedoch auch sofort aus Haupts allgemeiner Ordnungstheorie.

Eine Γ_6 kann höchstens die lineare Ordnung 3 haben, andererseits können Ovale und kubische Kurven wirklich vorkommen. Wir nehmen im folgenden an, dass die Γ_6 geschlossen ist und die folgende Bedingung erfüllt:

III. Wenn ein Kegelschnitt durch 5 Punkte von Γ in der Weise variiert, dass 2 oder mehrere der Punkte gegen denselben Grenzpunkt konvergieren, so soll der Kegelschnitt einer bestimmten Grenzlage zustreben.

Hieraus folgt dann unmittelbar, dass das Bild Γ' auf der Veroneseschen Fläche in jedem Punkt eine eindeutige Tangente, eine eindeutige Schmiegebene, eindeutige τ^3 und τ^4 hat, so dass Bedingung I erfüllt ist.

Ferner ist für Γ' die Bedingung II erfüllt. Ein $\mathfrak{R}^3$ hat nämlich im allgemeinen höchstens 4 Punkte mit der Veroneseschen

Fläche und also umso mehr höchstens 4 Punkte mit Γ' gemein. Enthält der $\mathfrak{R}^3$ einen Kegelschnitt der Fläche, so hat er höchstens noch einen Punkt mit V gemein. Einem Kegelschnitt auf V entspricht eine Gerade in der Ebene Π, die Γ in höchstens 3 Punkten schneidet. Die totale Anzahl von Schnittpunkten des $\mathfrak{R}^3$ mit Γ' ist also höchstens 4.

Endlich enthält die Kurve Γ' keine anderen singulären Punkte als Wendepunkte. Soll nämlich eine Hyperebene durch 5 Kurvenpunkte einer bestimmten Grenzlage zustreben (Bedingung III), wenn die 5 Punkte gegen denselben Kurvenpunkt konvergieren, so können nach einem Satz von Scherk ((12), Satz 4, 5) keine anderen Singularitäten als Wendepunkte auftreten.

Einem Wendepunkt auf Γ' entspricht offenbar ein sextaktischer Punkt auf der Kurve Γ in der Ebene, während einem regulären Punkt auf Γ' ein regulärer Punkt auf Γ entspricht. Wenden wir Satz 4, S. 12 auf Ovale an, so erhalten wir

Satz 12. Ein Oval der konischen Ordnung 6, für welches die Bedingung III erfüllt ist, enthält 6 sextaktische Punkte und besteht aus 6 Bögen der konischen Ordnung 5.

Mit Hilfe von Satz 12 können wir einige weitere Schlüsse ziehen. Mukhopadhyaya (8) hat gezeigt, dass ein Oval, das von einem Kegelschnitt in $2n$ Punkten geschnitten wird, mindestens $2n$ sextaktische Punkte enthält. (Hierin ist der Satz enthalten, dass jedes Oval mindestens 6 sextaktische Punkte besitzt; dieser Satz wurde von Mukhopadhyaya 1909 bewiesen.) Wir schliessen hieraus

Satz 13. Hat ein Oval 8 oder mehr sextaktische Punkte, so gibt es immer einen Kegelschnitt, der mindestens 8 Punkte mit dem Oval gemeinsam hat.

Wenn ein Oval einen Mittelpunkt hat, gibt es nach Blaschke ((1), S. 46) mindestens 8 sextaktische Punkte. Hieraus folgt

Satz 14. Die konische Ordnung eines Ovals mit Mittelpunkt ist mindestens 8.

Was die Existenz von Ovalen der konischen Ordnung 6 angeht, so kann z. B. auf die Ovale hingewiesen werden, die bei den algebraischen Kurven 3. Ordnung vorkommen. Ein solches Oval hat die konische Ordnung 6 und besitzt daher genau 6 sextaktische Punkte. Ein Oval mit genau 6 sextaktischen Punkten ist nach Mukhopadhyaya von der konischen Ordnung 6. Eine solche Kurve hat Blaschke konstruiert (l. c. S. 45).

Eine kubische Kurve der konischen Ordnung 6 hat weder Doppelpunkt noch Spitze, also 3 Wendepunkte. Diese sind auch zu den sextaktischen Punkten zu rechnen, da eine doppelt gezählte Wendetangente mit Γ im Wendepunkt 6 Punkte gemeinsam hat. Hieraus folgt

Satz 15. Eine geschlossene ebene Kurve der linearen Ordnung 3 und der konischen Ordnung 6, die die Bedingung III erfüllt, hat ausser den Wendepunkten 3 sextaktische Punkte und besteht aus 6 konischen Elementarbögen.

Dies stimmt überein mit der Anzahl der sextaktischen Punkte auf den algebraischen Kurven 3. Ordnung. Diese haben nämlich 27 reelle oder imaginäre sextaktische Punkte, nämlich die Berührungspunkte der Tangenten, die man von den 9 Wendepunkten an die Kurve legen kann. Da 6 Wendepunkte imaginär sind, bleiben 9 möglicherweise reelle sextaktische Punkte; 6 von diesen liegen auf dem eventuellen reellen Oval oder sind imaginär. Es gibt also genau 3 eigentliche sextaktische Punkte auf dem Zweig 3. Ordnung.

Literaturverzeichnis.

(1) BLASCHKE, W. Vorlesungen über Differentialgeometrie II (Berlin 1923).

(2) COURTAND, M. Sur les courbes gauches du quatrième ordre (C. R. de l'Ac. des Sc. B. 204, 1937 S. 215).

(3) DENK, F. Über elementare Punkte höherer Ordnung auf Kurven im $\mathfrak{R}^n$. (Sitzungsberichte d. phys.-med. Soz. zu Erlangen B. 67, 1935, S. 1).

(4) HAUPT, O. Ein Satz über die reellen Raumkurven vierter Ordnung und seine Verallgemeinerung (Math. Ann. B. 108, 1933, S. 126).

(5) HJELMSLEV, J. Introduction à la théorie des suites monotones (D. Kgl. Danske Vidensk. Selskab, Oversigt 1911. S. 343).

(6) JUEL, C. Om ikke-analytiske Kurver (D. Kgl. Danske Vidensk. Selskab, Skrifter 7. I. 6. 1906. S. 297).

(7) — Einleitung in die Theorie der ebenen Elementarkurven dritter und vierter Ordnung (D. Kgl. Danske Vidensk. Selskab, Skrifter 7. XI. 2. 1914. S. 113).

(8) MUKHOPADHYAYA, S. Extended Minimum Number Theorems of Cyclic and Sextactic Points on a Plane Convex Oval (Math. Zeitschr. B. 33, 1931, S. 648).

(9) SAUTER, I. Zur Theorie der Bogen n-ter (Realitäts)-Ordnung im projektiven $\mathfrak{R}^n$ (Math. Zeitschr. B. 41, 1936, S. 507).

(10) SCHERK, P. Über reelle geschlossene Raumkurven vierter Ordnung (Math. Ann. B. 112, 1936, S. 743).

(11) — Über differenzierbare Kurven und Bögen (Journ. Tschecoslov. de Math. et de Phys. B. 66, 1937, S. 165).

(12) — Über Punkte $(n+1)$-ter Ordnung auf Bögen im $\mathfrak{R}^n$. (Annali di Mat. Ser. IV, B. 17, 1938, S. 289).

Indleveret til Selskabet den 9. Februar 1942.
Færdig fra Trykkeriet den 9. Maj 1942.